Die Korrelation

In der Analyse von Datenmaterial ist eines der Hauptziele der Statistik eine Abhängigkeit bzw. einen Zusammenhang zwischen Merkmalen zu erkennen. Die Korrelation ermittelt den Grad der Stärke der Abhängigkeit zwischen zwei Merkmalen.

Der Korrelationskoeffizient wird als **p** bezeichnet. **p** ist die normierte Kovarianz und kann ähnlich der Kovarianz interpretiert werden, wobei er qualitativ bessere Aussagen macht als die Kovarianz. Am Beispiel der Aktienrenditen soll dies deutlich werden. Es besagt nicht nur, ob die Renditen positiv oder negativ korreliert sind, sondern auch wie stark der Zusammenhang ist. Die Spannbreite des Korrelationskoeffzienten liegt zwischen - 1 und + 1.

p = 1: Vollständige/perfekte positve Korrelation (Aktienrenditen entwickeln sich immer in dei selbe Richtung)

0<p<1: Positive Korrelation (Akteinrenditen entwickeln sich tendenzill gleichläufig)

p = 0: Unkorrelierte Renditen (Es besteht kein sichtbarer Zusammenhang zwischen der Entwicklung der Renditen der Aktien A und B)

-1<p<0: negative Korrelation (Aktienrenditen entwickeln sich tendentiell gegenläufig , d.h. ween A steigt, sikt B oder umhgekehrt)

p= -1: Vollständige negative Korrelation (Aktienrenditen entwickeln sich immer gegenläufig. Steigt die Rendite A, so sinkt die Rendite B)

Beispiel in einer Portfolio-Berechnung:

Es wird von drei Anlagefonds mit folgenden Daten ausgegangen:

	Equity Fonds	Bond Fonds	Geldmarktfonds
Rendite	7,00 %	4,5 %	3 %
Varianz	0,0625	0,01	0
Standard-abweichung	25,00 %	10,00 %	0 %

Kovarianz: 0,0025
Korrelation: 0,1

Marktportfolio: 60 % in Equity Fonds, 40 % in Bond Fonds
Erwartete Rendite: 6 %, Risiko 15,9 %

Gefordert: 25,15 % und 50,30 % und 75,44 % Marktportfolio, Rest Investition jeweils in Geldmarktfonds
Sicherheit: ∂ 4 %, Wachstum: ∂ 8 %, Rentabilität: ∂ 12 %

Erwartete Rendite = (0,6 * 0,07 Rendite + 0,4 * 0,045 Rendite) = 0,06 % = 6 %

Variation = $\partial p^2 = w_1^{2} * \partial_1^{2} + w_2^{2} * \partial_2^{2} + 2 * w_1 * w_2 * \partial_{1+2}$

$0{,}6^2 * 0{,}0625 + 0{,}4^2 * 0{,}01 + 2 * 0{,}6 * 0{,}4 * 0{,}0025 = 0{,}0253$ (Variation)

Volotilität: $\sqrt{0{,}0253} = 0{,}159 = 15{,}9\ \%$ (Vola)

Sicherheit: $0{,}03 + \frac{(0{,}06 - 0{,}03)}{0{,}159} * 0{,}04 = 0{,}0375471$

Gewicht: für 25,15% $\frac{\text{Geforderte Rendite - sicherer Rendite}}{\text{erwartete Rendite - sichere Rendite}}$

für ∂ 4 % Rendite $\frac{(0{,}0375 - 0{,}03)}{(0{,}06 - 0{,}03)} = 0{,}25$

$\frac{(0{,}037547169 - 0{,}03)}{(0{,}06 - 0{,}03)} = 0{,}2515723 = 25{,}15\ \%$ sichere Rendite

Geldmarktfondsanteil: 74,85 %

Gewicht: für 50,30 % $\frac{(0{,}037547169 - 0{,}03)}{0{,}159} = 25{,}15\ \%$

für ∂ 8 % $\frac{(0{,}06 + 0{,}03)}{0{,}159} = 0{,}188679245$

$0{,}03 * 0{,}188679245 * 0{,}08 = 0{,}045094339$ geforderte Rendite

$0{,}0451 - 0{,}03 = 0{,}503333 = 50{,}\ 33\ \%$

Geldmarktfondsanteil: 49,67 %

---

für ∂ 12 % $0{,}03 + 0{,}188679245 * 0{,}12 = 0{,}052641509$

$\frac{(0{,}052641509 - 0{,}03)}{(0{,}06 - 0{,}03)} = 0{,}754716966 = 75{,}47\ \%$

Geldmarktfondsanteil: 24,53 %

Tracking Error volatilität = $\sqrt{\frac{1}{n} \sum (R(P) - R(M))^2}$

Mißt das aktive Managementrisiko, von dem Markt bzw. der Benchmark des Portfolios abzuweichen in Prozent.

SR = Sharpe Ratio = $\frac{R(P) - FG}{\text{Standardabweichung}}$

Mißt die über die sichere Geldmarktanlage hinausgehende Überschußrendite eines Portfolios pro Risikoeinheit. (in Vola)

Jensen‘s Alpha = $\mathbf{a} = R(P) - [FG + ß * (R(M) - FG]$

Mißt die risikoadjustierte Mehrrendite eines Portfolios über den Marktindex bzw. Benchmark.

Information Ratio = $\mathbf{IR} = \frac{\text{Jensen's Alpha}}{\text{Tracking Error}}$

Mißt das Jensen‘s Alpha pro Risikoeinheit gemessen in Tracking Error (Volatilität der relativen Performance) (über 0,3 % sehr gut)

Treynor Ratio = $\mathbf{TR} = \frac{R(P) - FG}{ß}$

Mißt die risikoadjustierte Überschußrendite eines Portfolios über eine sichere Geldmarktanlage. Risikobereinigung erfolgt über den Betafaktor.

Treyner Ratio des Marktes = **TR** = (M) = R(M) - FG

Sortino Ratio = $\mathbf{SR} = \frac{R(P) - MR}{\sqrt{LPM(2)}}$ (2 = Vergleichbarkeit der Semi-Volatilität)

Mißt die Mindesrendite (MR) hinausgehende Überschußrendite eines Portfolios pro Risikoeinheit (gemessen in LPM (2). (LPM = Lower Partial Moments)

Reverse Calmar Ratio = $\mathbf{rCR} = \frac{\text{Maximaler Verlust}}{\text{Rendite p.a.}}$

Mißt die durchschnittliche Zeit, bis ein maximaler Verlust wieder aufgeholt wird.

Elastizitäten = **E** = (+ / -)

Mißt das Performanceverhalten eines Portfolios in steigenden / fallenden Marktphasen.

Börsenbegriffe und die dazu gehörenden Rechenformeln
Portfoliotheorie

N	=	Anzahl der Umweltzustände
pj:	=	Eintrittswahrscheinlichkeit des j-ten Umweltzustandes
rj:	=	Renditeausprägung bei Eintritt des j-ten Umweltzustandes
µ	=	Erwartungswert der Rendite eines Assets
P	=	Portfolio, µp = Portfoliorendite
R	=	Marktrendite
rf	=	Risikofreie Kapitalanlage
Systematisches Risiko	=	trifft den gesamten Markt, Unsystematisches Risiko nur einzelne Unternehmen
Betafaktor	=	Maß für das verbleibende systematische Restrisiko eines Assets innerhalb eines vollständig diversifizierten Portfolios
Delta	=	Absolute Veränderung des Optionspreises bei Veränderung des Basiswertes um eine Einheit, ITM am höchsten
Gamma	=	Absolute Veränderung des Deltas bei Veränderung des Basiswertes um eine Einheit, ATM am höchsten, Delta steigend = Gamma positiv, Delta fallend = Gamma negativ
Vega	=	(Kappa) absolute Veränderung des Optionspreises bei Veränderung der Volatilität um einen Prozentpunkt, ATM am höchsten
Theta	=	Absolute Veränderung des Optionspreises bei Verringerung der Zeit um eine Periode, ATM am höchsten

SR - Sharpe Ratio = $\dfrac{\text{Rendite Aktie (Depot) - Rendite risikolos}}{\text{Volatilität der Aktie (des Depots)}}$

Sortino Ratio = $\dfrac{SR = R(P) - MR}{\sqrt{LPM\ (2)}}$ $\qquad \dfrac{\text{(Rendite Aktie oder Portfolio - Mindestrendite)}}{\text{Wurzel aus Lower Partial Moments}}$

Semivolatilität = $(R) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (R_i - R)^2}$

Beta = $ß = \dfrac{Cov\ (P,M)}{Var\ (M)}$ Mißt das systematische Risiko zwischen Portfolio und Marktindex.

Formeln: Kovarianz und Korrelationskoeffizient

Kovarianz ∂ xy von beobachteten Daten:

$\partial xy = Cov(X, Y)$

$$= \frac{1}{n-1} * ((X_1 - \overline{X}) * (Y_1 - \overline{Y}) + ... + (X_n - \overline{X} * (Y_n - \overline{Y})) = \frac{1}{n-1} * \sum_{i=1}^{n} ((X_i - \overline{X}) * (Y_i - \overline{Y}))$$

Korrelationskoeffizient p von beobachteten Daten:

$$p = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) * Var(Y)}} = \frac{\partial XY}{\sqrt{\partial^2 * \partial Y^2}} = \frac{\partial XY}{\partial_X * \partial_Y}$$

Varianz bzw. Standardabweichung ∂ der Rendite eines Assets:

$\partial^2 = (r_1 - \mu)^2 p_1 + ... + (r_N - \mu)^2 p_N$ und $\partial = \sqrt{\partial^2}$

Abgekürzte Rechnung für die Portfolio-Zusammensetzung bezogen auf die Beispielrechnung auf Seite 1:

$\frac{\text{Gewünschte Rendite}}{\text{Vola}}$

Rendite 4 %, Rechnung $\frac{0{,}04}{0{,}159}$ = 0,251572327 = 25,15 % Anteil an Risikoanlagen oder 74,85 % Geldmarktanteil

Rendite 8 %, Rechnung $\frac{0{,}08}{0{,}159}$ = 0,503144654 = 50,32 % Anteil an Risikoanlagen oder 49,68 % Geldmarktanteil

Rendite 12 %, Rechnung $\frac{0{,}12}{0{,}159}$ = 0,754716981 = 75,47 % Anteil an Risikoanlagen oder 24,53 % Geldmarktanteil